Sujets d'examens algèbre trois

Abdelkhalek El amrani
Département de mathématiques
Faculté des Sciences Dhar El Mahraz
B.P 1796 Atlas Fès, Maroc.

19 décembre 2017

Table des matières

Chapitre 1

Sujets d'examens

1.1 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar-Mehraz-Fès Département de mathématiques 2012-2013

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'alg\grave{e}bre2 - Juin\ 2013\,(S.N., S_2)$$

$$(Dur\acute{e}e : 3H)$$

$$N.B :\ Aucun\ document\ n'est\ autoris\acute{e}$$

1.1.1 Énoncé

Exercice 1.1.1 *Dans l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on considère les sous-ensembles :*

$$\mathcal{S}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ {}^tA = A\right\} \quad et \quad \mathcal{A}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ {}^tA = -A\right\}$$

Où ${}^tA$ *est la matrice transposée de la matrice* A.

1. *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *et* $\mathcal{A}_n$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Montrer que* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3. *Application : Soit* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer les matrices $S \in \mathcal{S}_2$ *et* $A \in \mathcal{A}_2$ *telle que* $M = S + A$.

Exercice 1.1.2 *On considère le système d'équations linéaires* (S_m) *défini par :*

$$(S_m) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z + t & = & 1 \\ x - z - t & = & 1 \\ -x + y + z + 2t & = & m \end{array} \right. \quad o\ m\ est\ un\ paramtre\ rel.$$

1. *Déterminer le rang du système* (S_m) .
2. *Résoudre le système* (S_m) *suivant les valeurs du paramètre réel* m.

Exercice 1.1.3 *Soit* E *un espace vectoriel réel, on rappel qu'un projecteur* P *de* E *est un endomorphisme de* E *qui vérifie l'égalité* $P \circ P = P$.

1. *Montrer que si* P *est un projecteur de* E, *alors :*

$$Im\,(I_E - P) = Ker\,(P) \;\; et \;\; Ker\,(I_E - P) = Im\,(P)\,.$$

   $(I_E$ *étant l'endomorphisme identité de* $E)$.
2. *Soient* P *et* Q *deux projecteurs de* E.
   a) *Montrer les équivalences suivantes :*

$$\left\{\begin{array}{rcccc} P \circ Q & = & 0 & \Longleftrightarrow & Im(Q) \subset Ker(P). \\ P \circ Q & = & P & \Longleftrightarrow & Ker(Q) \subset Ker(P). \\ Q \circ P & = & P & \Longleftrightarrow & Im(P) \subset Im(Q). \end{array}\right.$$

   b) *On pose :* $E_1 = Ker(Q) \cap Ker(P)$, $E_2 = Ker(Q) \cap Im(P)$, $E_3 = Im(Q) \cap Ker(P)$ *et* $E_4 = Im(Q) \cap Im(P)$.
   Montrer que si $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ *alors* $P \circ Q = Q \circ P$.

Problème 1.1.1 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *rapporté à sa base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, *on considère l'application* u *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$\begin{array}{c} u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto u\,((x, y, z)) = (4x + y + z, x + 4y + z, x + y + 4z) \end{array}$$

1. *Montrer que* u *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer la Matrice* M *de l'endomorphisme* u *relativement à la base* $\mathcal{B}$.
3. *Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels* $Ker(u)$ *et* $Im(u)$. u *est-il un automorphisme de* $\mathbb{R}^3$? *justifier votre réponse.*
4. *On considère le système de vecteurs* $\mathcal{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ *avec*

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_1' & = & e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' & = & e_2 - e_3 \\ e_3' & = & e_1 - e_3 \end{array}\right.$$

   Montrer que le système $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
5. *Déterminer la Matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$, *et calculer son inverse* P^{-1}.
6. *Déterminer la Matrice* M' *de l'endomorphisme* u *relativement à la base* $\mathcal{B}'$.
7. *Calculer* $\left(M'\right)^n$ *pour tout* n *in*$\mathbb{N}$ *et en déduire l'expression de la matrice* $(M)^n$ *en fonction de* n.

8. *On considère les suites récurrentes* (a_n), (b_n) *et* (c_n) *de nombres réels définies par les égalités :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & 4a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n & = & a_{n-1} + 4b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n & = & a_{n-1} + b_{n-1} + 4c_{n-1} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ c_0 = -1 \end{array} \right.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *le vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *dont les composantes dont la base* $\mathcal{B}$ *sont* (a_n), (b_n) *et* (c_n).
Donner une relation de récurrence entre X_n *et* X_{n-1} *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

9. *Déduire de ce qui précède les expressions des suites* (a_n), (b_n) *et* (c_n) *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$.

Bon courage

1.1.2 Corrigé

Exercice 5.1.1

1. $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en effet :

   - $\theta_n \in \mathcal{S}_n$ où θ_n est la matrice nulle, car ${}^t\theta_n = \theta_n$, d'où $\mathcal{S}_n \neq \emptyset$;
   - de plus si $(A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(A + \lambda B) &= {}^t A + {}^t(\lambda B) \\ &= {}^t A + \lambda {}^t B \\ &= A + \lambda B \ \left((A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2\right). \end{aligned}$$

   Donc $\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n$.

2. $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en effet :

   - $\theta_n \in \mathcal{A}_n$ où θ_n est la matrice nulle, car ${}^t\theta_n = \theta_n$, D'où $\mathcal{S}_n \neq \emptyset$;
   - de plus si $(A, B) \in (\mathcal{A}_n)^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(A + \lambda B) &= {}^t A + {}^t(\lambda B) \\ &= {}^t A + \lambda {}^t B \\ &= -A + \lambda - B \ \left((A, B) \in (\mathcal{S}_n)^2\right) \\ &= -A - \lambda B. \end{aligned}$$

   Donc $\forall (A, B) \in (\mathcal{A}_n)^2$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $A + \lambda B \in \mathcal{A}_n$.

3. – On a bien $\{\theta_n\} \subset \mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n$ de plus si $A \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n$, alors ${}^tA = -A$ *et* ${}^tA = A$ d'où $A = -A$ et par suite $A = \theta_n$; donc $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n = \{\theta_n\}$,
   – d'autre part on a bien $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on a $A = \frac{1}{2}(A +^t A) + \frac{1}{2}(A -^t A)$, et si on pose $A' = \frac{1}{2}(A +^t A)$ *et* $B' = \frac{1}{2}(A -^t A)$, on aura :${}^tA' = \frac{1}{2}({}^tA + A) = A' \Longrightarrow A' \in \mathcal{S}_n$ et ${}^tB' = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A -^t A) = -B' \Longrightarrow B' \in \mathcal{A}_n$; donc $\mathcal{M}_n\mathbb{R} \subset \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$

   Donc $\mathcal{M}_n\mathbb{R} = \mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$.

4. ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et les matrices demandées sont données par :

$$S = \frac{1}{2}\left(M +^t M\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   et

$$A = \frac{1}{2}\left(M -^t M\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.1.2

1. Déterminons le rang de (S_m) par la méthode de Gauss :
   Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice du système, alors :

$$\begin{aligned} A_m & \overset{L_3'=L_3+L_1 \ et \ L_2'=L_2-L_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \overset{L_3''=L_3'+L_2' \ et \ L_2''=L_3'+L_2'}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \overset{L_3'''=L_3''-L_2''}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Donc $rg(S_m) = 2$.

2. Résolution du système par la méthode de Gauss :

soit $A'_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ la matrice élargie du système, alors :

$$\begin{aligned} A'_m & \overset{L'_3=L_3+L_1 \ et \ L'_2=L_2-L_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & m+1 \end{pmatrix} \\ & \overset{L''_3=L'_3+L'_2 \ et \ L''_2=L'_3+L'_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & m+1 \end{pmatrix} \\ & \overset{L'''_3=L''_3-L''_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc :
Si $m \neq -1$, le système (S_m) est incompatible et n'admet pas de solution .
Si $m = -1$, alors

$$\begin{aligned} (S_m) & \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t & = & 1 \\ y + t & = & 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 + z + t \\ y & = & -t \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de solutions du système (S_m) est

$$S = \{(1 + z + t, -t, z, t) : \ z \in \mathbb{R} \ et \ t \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 5.1.3

1. Montrons que $Im\,(I_E - P) = KerP$:
Soit $x \in KerP$ alors $P\,(x) = 0$ d'où $x = x - P\,(x) = (I_E - P)\,(x)$ donc $x \in Im\,(I_E - P)$ et par suite $KerP \subset Im\,(I_E - P)$.
Inversement, soit $x \in Im\,(I_E - P)$ alors $\left(\exists x' \in E\right) : x = x' - P\left(x'\right)$ d'où $P\,(x) = P\left(x' - P\left(x'\right)\right) = P\left(x'\right) - P\left(x'\right) = 0$, car $P \circ P = P$, donc $x \in KerP$ et par suite $Im\,(I_E - P) \subset KerP$. Donc $Im\,(I_E - P) = KerP$:
Montrons que $ImP = Ker\,(I_E - P)$

$(I_E - P) \circ (I_E - P) = I_E - P - P + P^2 = I_E - P - P + P = I_E - P$ car $P \circ P = P$, donc $I_E - P$ est un projecteur , donc d'après ce qui précède $Im\,(I_E - (I_E - P)) = Ker\,(I_E - P)$ ou encore $ImP = Ker\,(I_E - P)$.

2. *a.*
   - Si $P \circ Q = 0$, alors $(\forall x \in Im\,(Q))\left(\exists x' \in E\right) : x = Q\left(x'\right)$, d'où $P\,(x) = (P \circ Q)\left(x'\right) = 0$, donc $x \in KerP$.
   Inversement : si $Im\,(Q) \subset KerP$, alors pour tout $x \in E$ on a $(P \circ Q)\,(x) = P\,(Q\,(x)) = 0$ car $Q\,(x) \in Im\,(Q)$.

–

$$P \circ Q = P \Longleftrightarrow P - P \circ Q = 0 \Longleftrightarrow P \circ (I_E - Q) = 0$$
$$\Longleftrightarrow Im\,(I_E - Q) \subset KerP$$

d'après la première équivalence et le fait que $I_E - Q$ est un projecteur Or, d'après 1. $Im\,(I_E - Q) = KerQ$; donc

$$P \circ Q = P \Longleftrightarrow KerQ \subset KerP.$$

–

$$P \circ Q = P \Longleftrightarrow (I_E - Q) \circ (I_E - P) = I_E - Q$$
$$\Longleftrightarrow Ker\,(I_E - P) \subset Ker\,(I_E - Q)$$

d'après l'équivalence qui précède et le fait que $I_E - P$ *et* $I_E - Q$ sont des projecteurs.
Or, d'après la première question, $Ker\,(I_E - P) = ImP$ *et*
$Ker\,(I_E - Q) = ImQ$ d'où

$$P \circ Q = P \Longleftrightarrow Im\,(P) \subset Im\,(Q)\,.$$

b. Supposons que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ et montrons que $(\forall x \in E)\,(P \circ Q)\,(x) = (Q \circ P)\,(x)\,.$
Soit $x \in E$ alors $\exists\,!\;x_1 \in E_1$, $\exists\,!\;x_2 \in E_2$, $\exists\,!\;x_3 \in E_3$ *et* $\exists\,!\;x_4 \in E_4$ tels que $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ d'où

$$\begin{aligned} Q\,(x) &= Q\,(x_1) + Q\,(x_2) + Q\,(x_3) + Q\,(x_4) \\ &= Q\,(x_3) + Q\,(x_4) \;\; car \; x_1 \in E_1 \; et \; x_2 \in E_2 \\ &= x_3 + x_4 \;\; (\, x_3 \in E_3 \; et \; x_4 \in E_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in E_3 &\Longrightarrow x \in Im\,(Q) \\ &\Longrightarrow \exists x' \in E : Q\left(x'\right) = x \\ &\Longrightarrow Q\,(x) = Q\left(Q\left(x'\right)\right) = Q\left(x'\right) = x \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} (P \circ Q)\,(x) &= P\,(x_3) + P\,(x_4) \\ &= P\,(x_4) \;\; (x_3 \in E_3) \\ &= x_4 \;\; (x_4 \in E_4)\,. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} P\,(x) &= P\,(x_1) + P\,(x_2) + P\,(x_3) + P\,(x_4) \\ &= P\,(x_2) + P\,(x_4) \;\; (x_1 \in E_1 \; et \; x_3 \in E_3) \\ &= x_2 + x_4 \;\; (\, x_2 \in E_2 \; et \; x_4 \in E_4) \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}(Q\circ P)(x) &= Q(x_2)+Q(x_4)\\ &= Q(x_4)\ \ (\ x_2\in E_2)\\ &= x_4\ \ (\ x_4\in E_4)\,.\end{aligned}$$

Donc $(\forall x\in E)\,(P\circ Q)(x)=(Q\circ P)(x)\,.$

Problème 5.1.1

1. Simple à vérifier .
2. $M=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$
3. $$Keru=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:u(x,y,z)=0\right\}$$

   Donc : pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in Keru &\Longleftrightarrow M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}4x+y+z&=&0\\x+4y+z&=&0\\x+y+4z&=&0\end{array}\right.\end{aligned}$$

   Résolvons ce système par la méthode de Gauss : la matrice du système est M et on a :

$$\begin{aligned}M &\overset{C_1'=C_2\ et\ C_2'=C_1}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&4&1\\4&1&1\\1&1&4\end{pmatrix}\\ &\overset{L_2''=L_2'-L_1'\ et\ L_3''=L_3'-L_1'}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&4&1\\3&-3&0\\0&-3&3\end{pmatrix}\\ &\overset{L_3'''=\frac{1}{3}L_3''\ et_2''=\frac{1}{3}L_2''}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&4&1\\1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\\ &\overset{L_2''''=_2'''-L_1'''}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-5&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\\ &\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&-1\\0&5&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&4&1\\0&1&-1\\0&0&6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc le système est équivalent à $x = y = z = 0$ et par suite $Keru = \{0\}$ et $dim\,(Keru) = 0$ et d'après le théorème du rang $dim\,(Keru) + dim\,(Imu) = dim\,(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $dim\,(Imu) = 3$ et par suite $Imu = \mathbb{R}^3$ donc $\mathbf{B}$ est une base de Imu et $(\emptyset)$ est une base de $Keru$.
u est un automorphisme car $Keru = \{0\}$.

4. La matrice associée à ce système de vecteurs est donnée par :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{L_3^{'}=L_3-L_1 \ et \ L_2^{'}=L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\rightsquigarrow}{L_3^{''}=L_3^{'}+L_2^{'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est maximum d'où $\mathcal{B}^{'}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{detP}\left({}^{t}ComP\right) = \left(\frac{1}{-3}\right)^{t} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{t} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. $M^{'} = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\left(M^{'}\right)^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$; d'où

$$M^n = \left(PM^{'}P^{-1}\right)^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n+2 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+2 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^n+2 \end{pmatrix}.$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = MX_{n-1}$.

9. D'après la réponse précédente, on montre par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ X_n = M^n X_0$$

Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n+2 & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+2 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2^n+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

c'est à dire $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 0 \\ b_n & = & 3^n \\ c_n & = & -3^n \end{array} \right.$

1.2 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2012-2013

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'algèbre2 - Juin\ 2013\ (S.R., S_2)$$

$$(Durée : 3H)$$

$$N.B : \ Aucun\ document\ n'est\ autorisé.$$

1.2.1 Énoncé

Exercice 1.2.1 *Soit m un réel.*

1. *Calculer le déterminant* $D_m = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
2. *On considère le système d'équations linéaires :*

$$(S_m) \quad \begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 0 \\ -x + y + mz &= -1 \\ mx + y + z &= -t \end{cases}$$

   (a) *Pour quelle valeurs de m le système (S_m) est-il de **Cramer** ?*
   (b) *Résoudre le système (S_m) en fonction du paramètre m*

Exercice 1.2.2 *On considère le système d'équations linéaires (S_m) défini par :*

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + 2y - z + t &= 1 \\ x - z - t &= 1 \\ -x + y + z + 2t &= m \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. *Déterminer le rang du système (S_m).*
2. *Résoudre le système (S_m) suivant les valeurs du paramètre réel m.*

Exercice 1.2.3 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients réels muni de sa base canonique $\{1, X, X^2\}$, on considère l'application $g : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :*

$$g(P) = (X+1)P' + P$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. *Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*

2. *Donner la matrice A de g dans la base $(1, X, X^2)$.*
3. *Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner l'expression de g^{-1}.*
4. *En déduire le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, solution de l'équation :*

$$(X+1)P' + P = 3X^2 + 6X + 5.$$

Problème 1.2.1 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:*

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Où a et b sont des réels donnés.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M_{(a,b)}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

1. *Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur de composantes x, y, z dans la base $\mathcal{B}_c$. Calculer $f(X)$.*
2. *Montrer que $M_{(a,b)} = (a-b)I_3 + bJ$ où I_3 est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
3. *Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire l'expression de $\left(M_{(a,b)}\right)^n$*
4. *Pour quelles valeurs de a b l'endomorphisme f est-il bijectif ?*
5. *Soit $\mathcal{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ le système de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :*

$$\begin{cases} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' &= e_1 - e_2 \\ e_3' &= e_1 - e_3 \end{cases}$$

   Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. *Donner la Matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}'$.*
7. *Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.*
8. *Déterminer la Matrice $M'_{(a,b)}$ de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}'$.*
9. *Calculer pour tout n $in\mathbb{N}^*$ la matrice $\left(M'_{(a,b)}\right)^n$ et retrouver l'expression de $\left(M_{(a,b)}\right)^n$.*

Bon courage

1.2.2 Corrigé

Exercice 5.2.1

1. Il est bien évident que la méthode la moins coûteuse en calculs est celle qui consiste à développer ce déterminant par rapport à la quatrième colonne . En effet :

$$
\begin{aligned}
D_m &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} m-1 & 1-m & 0 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} \\
&= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \\
&= (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi $D_m = m(m-1)(m+1)$

2. *a*. La matrice A_m du système est définie par :

$$
A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Le système (S_m) est de Cramer si et seulement si le nombre d'équations coïncide avec le nombre d'inconnues, ici elles sont en nombre de 4, et que la matrice du système soit inversible.
On a calculé dans la question précédente le déterminant de la matrice A_m, $detA_m = D_m = m(m-1)(m+1)$. A_m est inversible si et seulement si $D_m \neq 0$ si et seulement si $m \neq 0$ *et* $m-1 \neq 0$ *et* $m+1 \neq 0$.
b. 1^{er} *cas* : Si $m \neq 0$ *et* $m-1 \neq 0$ *et* $m+1 \neq 0$ le système est de Cramer et la solution est unique et est donnée par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m(m-1)(m+1)} = \frac{m^2+m-2}{m(m^2-1)} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & m & 0 \\ m & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m(m-1)(m+1)} = \frac{-2}{m(m^2-1)} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{m(m-1)(m+1)} = \frac{2-m}{m(m-1)} \\ t = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{m(m-1)(m+1)} = -1 \end{cases}$$

2^{em} *cas* : Si $m = 0$ le système (S_0) devient

$$(S_0)\begin{cases} y+z &= 1 & (i) \\ x+z &= 1 & (ii) \\ -x+y &= -1 & (iii) \\ y+z+t &= 0 & (iv) \end{cases}$$

En sommant les équations (ii) et (iii) on obtient $y+z=-1$ ce qui est incompatible avec l'équation (i) , le système est donc incompatible et son ensemble de solution est $S_0 = \emptyset$.

3^{em} *cas* : Si $m = 1$ le système (S_1) devient

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z &= 1 & (i) \\ x+y+z &= 0 & (ii) \\ -x+y+z &= -1 & (iii) \\ x+y+z+t &= 0 & (iv) \end{cases}$$

Les équations (i) et (ii) sont incompatibles , le système est donc incompatible et son ensemble de solution est $S_1 = \emptyset$.

4^{em} *cas* : Si $m = -1$ le système (S_{-1}) devient

$$(S_{-1})\begin{cases} -x+y+z &= 1 & (i) \\ x-y+z &= 0 & (ii) \\ -x+y-z &= -1 & (iii) \\ -x+y+z+t &= 0 & (iv) \end{cases}$$

Il est trivial de constater que les équations (ii) et (iii) sont incompatibles , le système est donc incompatible et son ensemble de solution est $S_{-1} = \emptyset$.

Exercice 5.2.2 (Solution déjà faite)
Exercice 5.2.3

1. Montrons que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $d°P \leq 2$ d'où $d°P' \leq 1$ donc $d°\left((X+1)P'\right) \leq 2$ il s'ensuit que : $g(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Par ailleurs :

   Soient P Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} g(P+\lambda Q) &= (X+1)(P+\lambda Q)' + (P+\lambda Q) \\ &= (X+1)\left(P' + \lambda Q'\right) + P + \lambda Q \\ &= \left[(X+1)P' + P\right] + \lambda\left[(X+1)Q' + Q\right] \\ &= g(P) + \lambda g(Q). \end{aligned}$$

   g est par conséquent un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminons la matrice A de l'endomorphisme g dans la base canonique. Il s'agit de calculer $g(1)$, $g(X)$ *et* $g(X^2)$

$$\begin{cases} g(1) & = & 1 & & \\ g(X) & = & (X+1)+X & = & 2X+1 \\ g(X^2) & = & (X+1).2X+X^2 & = & 3X^2+2X \end{cases}$$

   Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Pour montrer que g est bijectif, il suffit de montrer qu'il est de rang maximal c'est à dire 3 ou que la matrice A est de rang 3 c'est à dire qu'elle est inversible et donc il suffit finalement de vérifier que $detA \neq 0$. Or la matrice A est triangulaire, et $detA = 6$ d'où $detA \neq 0$.
   De même pour déterminer l'expression de l'automorphisme inverse g^{-1} de g il suffit de déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est à dire A^{-1}.
   Or $detA = \left(\frac{1}{detA}\right)^t (ComA)$. On vérifie facilement que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   et par suite si $P = a + bX + cX^2$, alors les composantes de $g^{-1}(P)$ dans la base $(1, X, X^2)$ sont définies par : $A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \\ \frac{b}{2} - \frac{c}{3} \\ \frac{c}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $g^{-1}(P) = \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right) X + \left(\frac{c}{3}\right) X^2$

4. Il s'agit dans cette question de déterminer le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $g(P) = 5 + 6X + 3X^2$ c'est à dire $P = g^{-1}(5 + 6X + 3X^2)$. Les composantes de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont données par :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $P = 3 + 2X + X^2$

Problème 5.2.2

1.

$$\begin{aligned} f(X) &= M_{(a,b)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by + bz \\ bx + ay + bz \\ bx + by + az \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$, un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} (a-b) I_3 + bJ &= \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $J^1 = J$,

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3J \end{aligned}$$

et donc $J^3 = J^2 J = (3J) J = 3J^2 = 3^2 J$ Il est facile de montrer, par récurrence sur n, que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad J^n = 3^{n-1} J$.

Pour calculer $\left(M_{(a,b)}\right)^n$, il suffit d'utiliser la question 2) et constater que les deux matrices I et J commutent.
La formule du binôme s'applique sans peine et on a :

$$
\begin{aligned}
(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left(M_{(a,b)}\right)^n &= \left[(a-b)\, I_3 + bJ\right]^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k J^k (a-b)^{n-k} I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k J^k (a-b)^{n-k} \\
&= C_n^0 (a-b)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k b^k J^k (a-b)^{n-k} \\
&= (a-b)^n I_3 + J. \sum_{k=1}^{n} C_n^k b^k 3^{k-1} (a-b)^{n-k} \\
&= (a-b)^n I_3 + \\
&\frac{1}{3} J. \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (3b)^k (a-b)^{n-k} - C_n^0 (a-b)^n\right] \\
&= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right] J \\
&= M_{(c,d)}
\end{aligned}
$$

avec

$$c = \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n + 2(a-b)^n\right] \ et\ d = \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right]$$

Soit :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left(M_{(a,b)}\right)^n$ est égale à :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n \end{pmatrix}$$

4. f est bijectif si et seulement si $M_{(a,b)}$ est inversible c'est à dire si et seulement si $det\left(M_{(a,b)}\right) \neq 0$. Calculons ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & b \\ b-a & a-b & b \\ 0 & b-a & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & a+2b \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2 (a+2b)$$

D'où $det\left(M_{(a,b)}\right) = (a-b)^2 (a+2b)$ et par suite f est bijectif si et seulement si $(a-b)^2 (a+2b) \neq 0$ si et seulement si $a \neq b$ *et* $a \neq -2b$

5. Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de prouver que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ des composantes des vecteurs e_1', e_2' *et* e_3' par rapport à la base canonique est de rang 3, autrement dit que son déterminant n'est pas nul . Calculons $detP$ par la méthode de Gauss.

$$detP = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 3.$$

$detP \neq 0$. P est donc de rang 3 et $\mathcal{B}'$ est par conséquence une base de $\mathbb{R}^3$.

6. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Calculons P^{-1} $(ComP) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et

$$^t(ComP) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi donc $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

8.
$$\begin{aligned} M'_{(a,b)} &= P^{-1}M_{(a,b)}P \\ &= \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons que le résultat obtenu est extraordinaire parce qu'il permet le calcul facile de $\left(M'\right)^n$ (étant donné qu'elle est diagonale).

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\left(M'_{(a,b)}\right)^n = \begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix};$$
d'où
$$\left(M_{(a,b)}\right)^n = \left(PM'_{(a,b)}P^{-1}\right)^n = P\left(M'_{(a,b)}\right)^n P^{-1}$$
Le calcul de ce double produit matriciel (on rappel qu'il est associatif) nous conduit au résultat trouvé auparavant à savoir $\left(M_{(a,b)}\right)^n$ est égale
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n \\ (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n - (a-b)^n & (a+2b)^n + 2(a-b)^n \end{pmatrix}$$

1.3 Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2013-2014

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'alg\grave{e}bre2 - Juin\ 2014\,(S.N., S_2)$$

$$(Dur\acute{e}e : 3H)$$

$$N.B : \ Aucun\ document\ n'est\ autoris\acute{e}.$$

1.3.1 Énoncé

Exercice 1.3.1 *Soit ϕ l'endomorphisme de $I\!R^3$ défini par*

$$\phi\,(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 4x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3)\,.$$

1. *Donner la matrice A de ϕ relativement à la base canonique B de $I\!R^3$.*
2. *Déterminer $Im\,(\phi)$. Donner le rang de ϕ.*
3. *Quelle est la dimension de $\ker(\phi)$? Donner une base de $\ker(\phi)$.*
4. *Soient*
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) *Calculer le déterminant de la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, v_1, v_2 et v_3.*
   (b) *En déduire que ces trois vecteurs forment une base de $I\!R^3$, qu'on notera B'.*
5. *Écrire la matrice de passage $P_{BB'}$, de la base canonique B vers la base B'.*
6. *Calculer son inverse $P_{BB'}^{-1}$.*
7. *Donner la matrice A' de ϕ relativement à la base B'.*
8. *Calculer A^n pour tout $n \in I\!N^*$.*
9. *Soient $u_0, v_0, w_0 \in I\!R$. On définit les suites $(u_n)_{n\in I\!N}$, $(v_n)_{n\in I\!N}$ et $(w_n)_{n\in I\!N}$ par les relations de récurrence suivantes*
$$\begin{cases} u_n &= -3u_{n-1} - 4v_{n-1} - 2w_{n-1}, \\ v_n &= u_{n-1} + 2v_{n-1} + w_{n-1}, \\ w_n &= 2u_{n-1} + 2v_{n-1} + w_{n-1}, \end{cases}$$
   pour tout $n \in I\!N^*$
   Déterminer u_n, v_n et w_n pour tout $n \in I\!N^*$.

Exercice 1.3.2 *Soit a un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note*

$$M_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

et $\triangle_n(a) = \det M_n(a)$.

1. *Montrer que, pour tour entier $n \geq 2$, on a $\triangle_n(a) = a\triangle_{n-1}(a) - a^{n-2}(n-1)^2$.*
2. *En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\triangle_n(a) = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.*
3. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M_n(a)$ soit inversible.*
4. *On pose $n = 3$. Déterminer, selon les valeurs du paramètre a, le rang de $M_3(a)$.*
5. *Pour $n = 4$ et $a = 1$, calculer l'inverse de $M_4(1)$.*

Exercice 1.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient f un endomorphisme de E nilpotent d'ordre n (c'est à dire, $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$). On note*

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, g \circ f = f \circ g\}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*
2. *Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ constitue une base de E.*
3. *Soit $\varphi_a : \mathcal{C}(f) \to E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.*
4. *En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, ..., f^{n-1})$.*

Bon courage

1.4 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2013-2014

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve \ \ d'algèbre2 - Juin\ 2014\,(S.R., S_2)$$

$$(Durée : 3H)$$

$$N.B:\ \ Aucun\ document\ n'est\ autorisé.$$

1.4.1 Énoncé

Exercice 1.4.1 *On munit l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *de sa base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, *où* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$f(e_1) = (5,-1,2)\,,\ f(e_2) = (-1,5,2) \text{ et } f(e_3) = (2,2,2)\,.$$

1. *Déterminer la matrice de* f *relativement à la base* $\mathcal{B}$ *et vérifier que :*
$$\left(\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right) \quad f((x,y,z)) = (5x - y + 2z, -x + 5y + 2z, 2x + 2y + 2z)\,.$$
2. *Soient* $u_1 = (1,1,-2)$, $u_2 = (1,1,1)$ *et* $u_3 = (2,0,1)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
3. *a. Donner la matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$.
b. Calculer la matrice inverse P^{-1} *de* P.
4. *Soit* A' *la matrice de* f *relativement à la base* $\mathcal{B}'$; *vérifier que :*
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
5. *Déterminer la dimension et une base de* $F_1 = \ker f$.
6. *Déterminer la dimension et une base de* $F_2 = \mathrm{Im} f$.
7. *Les sous-espaces* F_1 *et* F_2 *sont-ils supplémentaires ?*
8. *Calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$; *on convient que* $A^0 = I_3$.
9. *On considère les suites récurrentes* (a_n), (b_n) *et* (c_n) *de nombres réels définies par les égalités :*
$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - b_{n-1} + 2c_{n-1} \\ b_n = -a_{n-1} + 5b_{n-1} + 2c_{n-1} \\ c_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_0 = -1 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 1 \end{cases}$$
En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *le vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *dont les composantes dans la base* $\mathcal{B}$ *sont* a_n, b_n *et* c_n, *montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

10. Déduire de ce qui précède les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.4.2 *On considère la matrice A définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel et f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ associé à A.

1. *a. Montrer que* $\det A = (m+4)\, m^3$.
   b. Déterminer en fonction du paramètre réel m le rang de A ainsi qu'une base de $\mathrm{Im} f$.
2. *a. Pour quelles valeurs du réel α, le vecteur $u = (1, 1, 1, \alpha)$ est-il dans* $\mathrm{Im} f$? *(discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).*
   b. En déduire dans quels cas le système d'équations linéaires suivant admet des solutions :

$$(S_m) \quad \begin{cases} (1+m)\, x + y + z + t = 1 \\ x + (1+m)\, y + z + t = 1 \\ x + y + (1+m)\, z + t = 1 \\ x + y + z + (1+m)\, t = \alpha \end{cases}$$

   c. Déterminer en fonction de m et α, l'ensemble des solutions du système (S_m).

Exercice 1.4.3 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un* ***projecteur*** *si $p \circ p = p$.*

1. *a- Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $p(y) = y$.*
   b- En déduire que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
   On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
2. *a- Démontrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{Id} - p$ est aussi un projecteur de E.*
   b- Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p) = \ker(p), \qquad \ker(\mathrm{Id} - p) = \mathrm{Im}(p)$$

3. *Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme u de E si et seulement si son noyau et son image sont stables par u (c'est-à-dire, $u(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $u(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)$).*
4. *On suppose désormais que E est de dimension finie n.*
   a- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p a pour matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, où r est le rang de p, I_r est la matrice identité d'ordre r et 0_{n-r} est la matrice nulle d'ordre $n - r$.
   b- En déduire que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

Bon courage

1.5 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2014-2015

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve \;\; d'alg\grave{e}bre3 - Juin \; 2014 \, (S.N., S_2)$$

$$(Dur\acute{e}e : 1 \; heure \; 30 \; min)$$

$$N.B : \;\; Aucun \; document \; n'est \; autoris\acute{e}.$$

1.5.1 Énoncé

Problème :

A/ Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 3×3 à coefficients réels et soit F le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$F = \{M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \; s, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Donner, en fonction des valeurs de a, b et c, le rang de $M(a,b,c)$.
4. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $M(a,b,c)$ soit inversible.

B/ Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère la famille $\mathcal{S} = \{u, v, w\}$ de E avec $u = e_1 - e_3$, $v = -e_2$ et $w = e_1 + e_3$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une base de E.
2. Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?
3. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w et en déduire la matrice $D = [f]_{\mathcal{S}}$ de f dans $\mathcal{S}$.
4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{S}$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

C/ Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ de E, on considère le système (Σ_u) :

$$(\Sigma_u) : \left\{ \begin{array}{ccc} x + 2z & = & a \\ -y & = & b \\ 2x + z & = & c \end{array} \right.$$

1. Écrire (Σ_u) sous forme matricielle.
2. En utilisant la partie B/, montrer que pour tout $u \in E$, (Σ_u) admet une unique solution dans E.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (Σ_u) par deux méthodes différentes : de **Cramer** et de **Gauss.**

Exercice :

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^2 = 0$ (l'application nulle) et $\varphi \neq 0$. Posons $r = \text{rg}(\varphi)$.

1. Montrer que $\text{Im}(\varphi) \subset \ker(\varphi)$. En déduire que $r \leq 3 - r$ et calculer r.
2. Soit $e_1 \in E$ tel que $\varphi(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = \varphi(e_1)$.
   a- Montrer (sans le chercher) qu'il existe $e_3 \in \ker(\varphi)$ tel que la famille $\{e_2, e_3\}$ soit libre.
   b- Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3).

Bon courage

1.6 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mehraz-Fès Département de mathématiques 2014-2015

$$SMA - SMI$$
$$Epreuve\ \ d'algèbre3 - Juin\ 2015\,(S.R., S_2)$$
$$(Durée : 1\ heure\ 30\ min)$$
$$N.B:\ \ Aucun\ document\ n'est\ autorisé.$$

1.6.1 Énoncé

Problème 1.6.1 ***Partie A : (5.5 pts)***

Dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *on considère, pour tout* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et le sous-ensemble* E *défini par :*
$E = \{M(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. *Montrer que* $J^3 = I$ *où* I *est la matrice identité de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et en déduire que* J *est inversible et donner son inverse* J^{-1}.
2. *Vérifier que* $E = vect(I, J, J^2)$.
3. *Donner une base et la dimension de* E.
4. *Soit* $M = M(a, b, c)$ *un élément de* E. *Montrer que :*
   M *est inversible* $\Leftrightarrow$ $a + b + c \neq 0$ *et* $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + ac + bc$.

Partie B : (4 pts)

Soit F *un* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel de dimension* 3 *et* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* F. *On considère la famille* $\mathcal{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ *de* F *définie par :* $\begin{cases} e_1' &= e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ e_2' &= 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_3' &= 3e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$

Soit f *l'endomorphisme de* F *de matrice* $A = M(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

1. *Calculer* $\det(A)$. *L'application* f *est-elle bijective ?*
2. *Montrer que* $\mathcal{B}'$ *est une base de* F.
3. *Donner la matrice de passage* P *de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *et en déduire* $A' = [f]_{\mathcal{B}'}$ *la matrice de* f *par rapport à la base* $\mathcal{B}'$ *(sans calculer* P^{-1}*).*

Partie C :(3.5 pts)

Pour tout vecteur $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ *de* F, *on considère le système suivant :*

$$(\Sigma_u) : \begin{cases} x + 2y + 3z = \alpha \\ 3x + y + 2z = \beta \\ 2x + 3y + z = \gamma \end{cases}$$

1. *Écrire* (Σ_u) *sous forme matricielle et vérifier que c'est un système de Cramer.*
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$ *le système* (Σ_u) *par la méthode de* ***Cramer*** *et en déduire l'expression de* $f^{-1}(u)$.

Exercice 1.6.1 ***(7 pts)***

Soit E *un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel.*

1. *Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de* E *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Dans cette question on prend* $E = \mathbb{R}^3$ *et on considère les deux sous-espaces vectoriels de* E *définis par* $F = \{(x, y, z) \in E \ : \ 3x + y - 2z = 0\}$ *et* $G = Vect\,(u, v)$ *où* $u = (1, 0, 1)$ *et* $v = (2, 1, -1)$.
   a. *Montrer qu'il existe un vecteur* $w \in E$, *que l'on déterminera, tel que* $F \cap G = \mathrm{Vect}(w)$.
   b. *Montrer que* $E = F + G$. *Cette somme est-elle directe ?*
   c. *Montrer que* $F \cup G$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E. *Que peut-on en déduire ?*
3. *Dans cette question on suppose que* E *est de dimension* 3 *et soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $f^2 \neq \theta$ *et* $f^3 = \theta$, *où* $f^2 := f \circ f$, $f^3 := f \circ f \circ f$ *et* θ *est l'endomorphisme nul de* E. *Soient* $x_0 \in E$ *tel que* $f^2(x_0) \neq 0$ *et* $\mathcal{B} := (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$.
   a. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *est une base de* E.
   b. *Ecrire la matrice de* f *relativement à la base* $\mathcal{B}$.

Bon courage

1.7 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mehraz-Fès Département de mathématiques 2015-2016

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'alg\grave{e}bre3 - Juin\ 2016\,(S.N., S_2)$$

$$(Dur\acute{e}e : 1H30min)$$

$$N.B: \ Aucun\ document\ n'est\ autoris\acute{e}.$$

1.7.1 Énoncé

Exercice 1.7.1 (***Questions de cours***) ***(5 pts)***
Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.

1. *Montrer que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Par un exemple de votre choix montrer que le résultat précédent n'est pas vrai pour la réunion de deux sous-espaces vectoriels.*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Montrer que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
   (b) *Dans cette question on suppose que E est de dimension finie. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i). $u \in \mathcal{GL}(E)$, (ii). $Ker(u) = \{0\}$ et (iii). $Im(u) = E$.*

Problème 1.7.1 ***Partie A : (6 pts)***

1. *Pour tout vecteur $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$, on considère :*

$$F_u = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}.$$

   Montrer que F_u est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2. *On considère, dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant : $\Sigma_{(a,b)}$* $\begin{cases} ax + by + z = 0 \\ x + by + z = 0 \\ x + by + az = 0 \end{cases}$

   où a et b sont deux paramètres réels. Et soit $E_{(a,b)}$ son ensemble de solutions.
   (a) *Montrer que $E_{(a,b)}$ est un espace vectoriel de dimension finie.*
   (b) *Écrire $\Sigma_{(a,b)}$ sous forme matricielle.*
   (c) *Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\Sigma_{(a,b)}$ par la méthode de* ***Gauss****, on précisera dans chacun des trois cas possibles la dimension de $E_{(a,b)}$; en particulier, si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, montrer que $\dim\left(E_{(a,b)}\right) = 0$.*

Partie B : (2.5 pts) *Dans cette partie et la partie suivante, on considère un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :*
$f(e_1) = ae_1 + e_2 + e_3,\ f(e_2) = be_1 + be_2 + be_3$ *et* $f(e_3) = e_1 + e_2 + ae_3$ *où a et b sont deux réels fixés tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.*

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier que pour tout vecteur $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de E, $f(X) = (ax + by + z)e_1 + (x + by + z)e_2 + (x + by + az)e_3$.*
2. *En utilisant le théorème du rang et la question 3.(c) de la partie **A** , montrer que rang $(A) = 3$ et déduire une propriété de f.*

Partie B : (6.5 pts)
Dans cette partie on prend $a = -1$ et $b = 1$ et on considère la famille $\mathcal{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ de E définie par : $e_1' = e_1 - e_3,\ e_2' = e_1 - e_2 + e_3$ et $e_3' = e_1 + 2e_2 + e_3$

1. *Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.*
2. *Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.*
3. *montrer que $e_1 = \dfrac{1}{6}\left(3e_1' + 2e_2' + e_3'\right),\ e_2 = \dfrac{1}{6}\left(-2e_2' + 2e_3'\right)$ et $e_3 = \dfrac{1}{6}\left(-3e_1' + 2e_2' + e_3'\right)$ et en déduire P^{-1} la matrice inverse de P et que la matrice $A' = [f]_{\mathcal{B}'}$, matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, est donnée par : $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.*
4. *Soient F, G et H les trois sous-espaces vectoriels de E définis par : $F = Ker(f + 2id_E)$,*
   $G = Ker(f - 2id_E)$ et $H = Ker(f + id_E)$. Démontrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Bon courage

1.7.2 Corrigé

Exercice 1.7.2 1. *Comme $\forall i \in I\ \ F_i$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $\forall i \in I\ \ 0 \in F_i$, d'où $0 \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$, donc $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} F_i\right)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $\forall i \in I\ \ (x, y) \in F_i^2$, d'où $\forall i \in I\ \ x + \lambda y \in F_i$ (F_i est un sous $-$ espace vectoriel de E), donc $x + \lambda y \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

Donc $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. *Dans $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel de base canonique (e_1, e_2) (ou de toute autre base), on considère les deux sous-espaces vectoriels $F = vect(e_1)$ et $G = vect(e_2)$, alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$; en effet :*

$e_1 \in F \cup G$ *et* $e_2 \in F \cup G$ *mais* $u \notin F \cup G$, *où* $u = e_1 + e_2$, *car si non on aura* $u \in F$ *ou* $u \in G$, *d'où* $\exists \lambda \in \mathbb{R} : u = \lambda e_1$ *ou* $\exists \lambda \in \mathbb{R} : u = \lambda e_2$ *ou encore* $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda) e_1 + e_2 = 0$ *ou* $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda) e_2 + e_1 = 0$, *donc* (e_1, e_2) *est liée, ce qui est absurde.*

3. (a) *Comme* $u(0) = 0$, *alors* $0 \in Ker(u)$ *et* $0 \in Im(u)$, *d'où* $Ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont non vides.*

   Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in E^2$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a : si* $(x, y) \in (Ker(u))^2$, *alors :*

$$\begin{aligned} u(x + \lambda y) &= u(x) + \lambda u(y) \quad (u \text{ est linéaire}) \\ &= 0 + \lambda.0 \quad (x \in Ker(u) \quad \text{et } y \in Ker(u)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   d'où $x + \lambda y \in Ker(u)$.

   Et si $(x, y) \in (Im(u))^2$, *alors : il existe* $\left(x', y'\right) \in E^2$ *tel que* $u\left(x'\right) = x$ *et* $u\left(y'\right) = y$, *et alors :*

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= u\left(x'\right) + \lambda u\left(y'\right) \\ &= u\left(x' + \lambda y'\right) \quad (u \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

   et comme $x' + \lambda y' \in E$, *alors* $x + \lambda y \in Im(u)$.

   Donc $Ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E.

   (b) (i) $\Longrightarrow$ (ii)

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{GL}(E) &\Longleftrightarrow u \in \mathcal{L}(E) \text{ et } u \text{ est bijective} \\ &\Longrightarrow u \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow Ker(u) = \{0\}. \end{aligned}$$

   (ii) $\Longrightarrow$ (iii) E *étant un espace de dimension finie, alors, d'après le théorème du rang on a :*

$$\begin{aligned} dim(E) &= dim(Ker(u)) + dim(Im(u)) \\ &= 0 + dim(Im(u)) \quad (Ker(u) = \{0\}) \\ &= dim(Im(u)) \end{aligned}$$

   et comme $Im(u)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *(d'après a.), alors* $Im(u) = E$.

   Ou bien

$$\begin{aligned} Ker(u) = \{0\} &\Longrightarrow u \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow u \text{ est bijective} \quad (\text{la dimension de } E \text{ est finie }) \\ &\Longrightarrow u \text{ est surjective} \\ &\Longrightarrow u(E) = E \\ &\Longrightarrow Im(u) = E. \end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)*

$$\begin{aligned} Im\,(u) = E &\Longleftrightarrow u \text{ est surjective} \\ &\Longrightarrow u \text{ est bijective} \quad (\text{la dimension de } E \text{ est finie}) \\ &\Longleftrightarrow u \in \mathcal{GL}\,(E)\,. \end{aligned}$$

Problème 1.7.2 ***Partie A :***

1. *On a :* $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ *et* $\alpha.0 + \beta.0 + \gamma.0 = 0$, *d'où* $(0,0,0) \in F_u$, *et par suite* $F_u \neq \emptyset$.
   Et pour tous $v = (x, y, z)$ *et* $w = (x, y, z)$ *de* F_u *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*
   $$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha x^{'} + \beta y^{'} + \gamma z^{'} = 0 \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \lambda \alpha x^{'} + \lambda \beta y^{'} + \lambda \gamma z^{'} = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha\left(\lambda x^{'}\right) + \beta\left(\lambda y^{'}\right) + \gamma\left(\lambda z^{'}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha\left(x + \lambda x^{'}\right) + \beta\left(y + \lambda y^{'}\right) + \gamma\left(z + \lambda z^{'}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \left(x + \lambda x^{'}, y + \lambda y^{'}, z + \lambda z^{'}\right) \in F_u \\ &\Longrightarrow (x, y, z) + \lambda\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right) \in F_u \\ &\Longrightarrow v + \lambda w \in F_u. \end{aligned}$$
   Donc F_u *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
2. (a) $E_{(a,b)} = F_{u_1} \cap F_{u_2} \cap F_{u_3}$ *où* $u_1 = (a, b, 1)$, $u_2 = (1, b, 1)$ *et* $u_3 = (1, b, a)$ *sont des éléments de* $\mathbb{R}^3$, *donc d'après la question 1 de l'exercice* $E_{(a,b)}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$, *qui est de dimension finie (=3), donc* $E_{(a,b)}$ *est un espace vectoriel de dimension finie* $\left(\dim\left(E_{(a,b)}\right) \leqslant 3\right)$.

   (b) $\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est l'écriture matricielle du système* $\Sigma_{(a,b)}$.

   (c)
   $$\Sigma_{(a,b)} \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by + z = 0 \\ (1 - a)\,x = 0 \qquad (L_2 - L_1) \\ (a - 1)\,z = 0 \qquad (L_3 - L_2) \end{cases}$$
   D'où :
   1^{er} ***cas :*** *Si* $a - 1 \neq 0$, *c'est à dire* $a \neq 1$, *alors :*
   $$\Sigma_{(a,b)} \Longleftrightarrow \begin{cases} by = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
   d'où : ***Si*** $b \neq 0$, *alors :*
   $$\Sigma_{(a,b)} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

et donc $E_{(a,b)} = \{(0,0,0)\}$ *et dim* $\left(E_{(a,b)}\right) = 0$.

2^{eme} ***cas :*** *Si* $a \neq 1$ *et* $b = 0$, *alors :*

$$\begin{aligned} E_{(a,b)} &= \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y.(0,1,0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= vect(\{(0,1,0)\}) \end{aligned}$$

et dim $\left(E_{(a,b)}\right) = 1$.

3^{eme} ***cas :*** *Si* $a = 1$, *alors :*

$$\Sigma_{(a,b)} \Longleftrightarrow ax + by + z = 0 \ .$$

$$\begin{aligned} E_{(a,b)} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + z = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -ax - by\right\} \\ &= \left\{(x,y,-ax-by) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x.(1,0,-a) + y.(0,1,-b) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= vect(\{(1,0,-a),(0,1,-b)\}) \end{aligned}$$

Or pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$\begin{aligned} \lambda.(1,0,-a) + \mu.(0,1,-b) = (0,0,0) &\Longrightarrow (\lambda,\mu,-\lambda a - \mu b) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow \lambda = 0 \text{ et } \mu = 0. \end{aligned}$$

D'où la famille $((1,0,-a),(0,1,-b))$ *est libre, comme elle est génératrice de* $E_{(a,b)}$, *elle en est donc une base et dim* $\left(E_{(a,b)}\right) = 2$.

Partie B :

1. *La matrice* A *de* f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

et comme

$$\begin{aligned} A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by + z \\ x + by + z \\ x + by + az \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

alors

$$f(X) = (ax + by + z)\,e_1 + (x + by + z)\,e_2 + (x + by + az)\,e_3$$

2. *Pour tout* $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *de* E *On a :*

$$\begin{aligned} X \in Ker(f) &\Longleftrightarrow f(X) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (ax+by+z)\,e_1 + (x+by+z)\,e_2 + (x+by+az)\,e_3 = 0_E \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} ax+by+z=0 \\ x+by+z=0 \\ x+by+az=0 \end{cases} \quad (car\ \ (e_1,e_2,e_3)\ \ est\ libre) \\ &\Longleftrightarrow (x,y,z) \in E_{(a,b)}. \end{aligned}$$

Donc $Ker(f) = E_{(a,b)}$, *et par suite* $dim(Ker(f)) = dim\left(E_{(a,b)}\right)$ *Et comme* $a \neq 1$ *et* $b \neq 0$, *alors d'après la question 2.c de la partie **A** ,* $dim\left(E_{(a,b)}\right) = 0$, *d'où* $dim(Ker(f)) = 0$, *donc d'après le théorème du rang* $rang(f) = dim(E) - dim(Ker(f)) = dim(E) - 0 = dim(E)$, *et par suite* $rang(A) = rang(f) = 3$ *d'où* A *est inversible et donc* f *est un automorphisme de* E.

Partie C :

1. *Puisque* $dim(E) = 3 = card\left(\mathcal{B}'\right)$, *il suffit de montrer que* $\mathcal{B}'$ *est une famille libre.*
   Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :*$\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = 0_E$ *alors :* $(\alpha+\beta+\gamma)\,e_1 + (-\beta+2\gamma)\,e_2 + (-\alpha+\beta+\gamma)\,e_1 = 0_E$, *et comme* (e_1,e_2,e_3) *est une base de* E, *elle est donc libre et alors :*

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\beta+2\gamma=0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

   ce qui est équivaut à $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta=2\gamma \\ \alpha=3\gamma \end{cases}$ *ou encore* $\begin{cases} 6\gamma=0 \\ \beta=2\gamma \\ \alpha=3\gamma \end{cases}$ *ou encore* $\alpha = 0, \beta = 0$ *et* $\gamma = 0$, *donc* $\mathcal{B}'$ *est une famille libre, et par suite c'est une base de* E.

2. *La matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{B}$ *à la base* $\mathcal{B}'$ *est* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_3 \quad (L_1) \\ e_2' = e_1 - e_2 + e_3 \quad (L_2) \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad (L_3) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1' = e_1 - e_3 \quad (L_1') = (L_1) \\ e_2' - e_1' = -e_2 + 2e_3 \quad (L_2') = (L_2) - (L_1) \\ e_3' - e_1' = 2e_2 + 2e_3 \quad (L_3') = (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = e_1' + e_3 \quad (L_1') \\ e_2 = e_1' - e_2' + 2e_3 \quad (L_2') \\ 6e_3 = \left(-3e_1' + 2e_2' + e_3'\right) \quad (L_3') + 2\left(L_2'\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = e_1' + \frac{1}{6}\left(-3e_1' + 2e_2' + e_3'\right) \\ e_2 = e_1' - e_2' + \frac{1}{6}\left(-6e_1' + 4e_2' + 2e_3'\right) \\ e_3 = \frac{1}{6}\left(-3e_1' + 2e_2' + e_3'\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{6}\left(3e_1' + 2e_2' + e_3'\right) \\ e_2 = \frac{1}{6}\left(-2e_2' + 2e_3'\right) \\ e_3 = \frac{1}{6}\left(-3e_1' + 2e_2' + e_3'\right) \end{cases}$$

On sait que $P^{-1} = P_{B'B}$, *d'où*

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A' = P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Les matrices respectives de $f + 2id_E$, $f - 2id_E$ *et* $f + id_E$ *dans la base* B' *sont données par :* $[f + 2id_E]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $[f - 2id_E]_{B'} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $[f + id_E]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *donc* $(f + 2id_E)\left(e_1'\right) = 0$, $(f + 2id_E)\left(e_2'\right) =$

e_2' *et* $(f+2id_E)\left(e_3'\right)=4e_3'$ *et par suite pour tout vecteur* $x=\alpha e_1'+\beta e_2'+\gamma e_3'$ *de* E *on a :*

$$\begin{aligned} x\in F &\Longleftrightarrow (f+2id_E)(x)=0 \\ &\Longleftrightarrow \beta e_2'+4\gamma e_3'=0 \\ &\Longleftrightarrow \beta=\gamma=0 \quad \left(\left(e_1',e_2',e_3'\right) \text{ est libre}\right) \\ &\Longleftrightarrow x=\alpha e_1' \end{aligned}$$

donc $F=vect\left(e_1'\right)$.
Par la même méthode, on montre que $G=vect\left(e_3'\right)$ *et* $H=vect\left(e_2'\right)$ *; et comme* $\left(e_1',e_2',e_3'\right)$ *est une base de* E*, alors* $E=vect\left(e_1'\right)\oplus vect\left(e_2'\right)\oplus vect\left(e_3'\right)$, *donc* $E=F\oplus G\oplus H$.

1.8 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2015-2016

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'algèbre3 - Juillet\ 2016\,(S.R., S_2)$$

$$(Durée : 1H30min)$$

$$N.B:\ \ Aucun\ document\ n'est\ autorisé.$$

1.8.1 Énoncé

Exercice 1.8.1 ***(4 pts)*** *Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. *Montrer que $F+G$ est un sous sous-espace vectoriel de E, où $F+G = \{x+y : x \in F \text{ et } y \in G\}$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application linéaire $\bar{f}$ définie par :*

$$\begin{aligned} \bar{f} : E/Ker\,(f) &\longrightarrow E \\ x + Ker\,(f) &\longmapsto \bar{f}\,(x+Ker\,(f)) = f\,(x) \end{aligned}$$

a. Montrer que $\bar{f}$ est un isomorphisme de $E/Ker\,(f)$ vers $Im\,(f)$.
b. Déduire le théorème du rang dans le cas où la dimension de E est finie.

Problème 1.8.1 ***Partie A : (1.5 pts)***

1. *En utilisant la méthode **Gauss**, montrer que l'ensemble de solution, dans $\mathbb{R}^4$, du système :*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \\ 2y+3z+4t=0 \\ 4y+9z+16t=0 \end{cases}$$

est $S = \{(0,0,0,0)\}$.

Partie B : (8 pts) *Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on considère les quatre vecteurs g_1, g_2, g_3 et g_4 définis par :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g_1\,(x) = 1,\ \ g_2\,(x) = e^{2x},\ \ g_3\,(x) = e^{3x}\ \ et\ \ g_4\,(x) = e^{4x}.$$

Et on pose $E = vect\,(g_1, g_2, g_3, g_4)$.

1. *Montrer que $\mathcal{B}_1 = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ est une base de E et en déduire la dimension, (on pourra passer à la limite en $-\infty$ et utiliser la partie**A**).*

2. *On définit l'application* φ *par :* $\varphi : E \longrightarrow E, \quad f \longmapsto \varphi(f) = f'$

   a. *Prouver que* φ *est un endomorphisme de* E.

   b. *Montrer que la matrice de* φ *dans la base* $\mathcal{B}_1$ *est donnée par :* $M = [\varphi]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   c. *Soit* $F = Ker(\varphi)$. *Montrer que* $F = vect(g_1)$ *et en déduire que* $\varphi \notin \mathcal{GL}(E)$.

3. *Soit* p *l'application définie par :* $p : E \longrightarrow E/F, \quad x \longmapsto p(x) = x + F$

   a. *Prouver que* p *est une application linéaire surjective de* E *sur* E/F.

   b. *Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel quotient* E/F.

   c. *Dire pourquoi* p *ne peut être un isomorphisme.*

Partie C : (5.5 pts) *Soit* $\mathcal{B}_2 = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ *la base de* E *telle que la matrice de passage de* $\mathcal{B}_1$ *à* $\mathcal{B}_2$ *est donnée par :* $P = P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

1. *Donner, en justifiant votre réponse, une propriété de la matrice* P.
2. *Écrire* h_1, h_2, h_3 *et* h_4 *en fonction de* g_1, g_2, g_3 *et* g_4.
3. *Écrire* g_1, g_2, g_3 *et* g_4 *en fonction de* h_1, h_2, h_3 *et* h_4 *et en déduire* P^{-1} *la matrice inverse de* P *et* $M' = [\varphi]_{\mathcal{B}_2}$ *la matrice de* φ *dans la base* $\mathcal{B}_2$.
4. *La matrice* M' *est-t-elle inversible ? (justifier votre réponse sans calcul), et en donner le rang.*

Bon courage

1.8.2 Corrigé

Exercice 1.8.2 1. ***1.5 pt*** *Comme* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *alors* $0 \in F$ *et* $0 \in G$, *d'où* $0 + 0 \in F + G$, *ou encore* $0 \in F + G$, *donc* $F + G \neq \emptyset$.

Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in (F + G)^2$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on a :* $\exists (x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$ *et* $\exists (y_1, y_2) \in F \times G : y = y_1 + y_2$ *d'où :*

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= (x_1 + x_2) + \lambda (y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) \end{aligned}$$

et comme F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* E, *alors* $x_1 + \lambda y_1 \in F$ *et* $x_2 + \lambda y_2 \in G$, *d'où* $x + \lambda y \in F + G$.

Donc $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

2. a. ***1.5 pt*** $\bar{f}$ *étant une application linéaire et prend bien ses valeurs dans* $Im(f)$, *par hypothèse, il s'agit, donc, de montrer qu'elle est bijective :*

Injection : *Pour tout élément* $X = x + Ker(f)$ *de* $E/Ker(f)$ *on a :* $x \in E$ *et*

$$\bar{f}(X) = 0 \Leftrightarrow \bar{f}(x + Ker(f)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Ker(f) \Leftrightarrow X = x + Ker(f) = Ker(f)$$

Donc $\bar{f}$ *est injective.*
Surjection : *Soit* $y \in Im(f)$ *alors* $\exists x \in E$ *tel que* $f(x) = y$, *d'où* $\bar{f}(x + Ker(f)) = f(x) = y$, *et comme* $x + Ker(f) \in E/Ker(f)$, *alors* $\bar{f}$ *est surjective.*
Finalement $\bar{f}$ *est un isomorphisme de* $E/Ker(f)$ *vers* $Im(f)$.

b. ***1 pt*** *Si* E *est de dimension finie, alors* $Im(f)$, *qui est un sous-espace vectoriel de* E, *est de dimension finie, et comme il est isomorphe à* $E/Ker(f)$, *alors,* $dim(E/Ker(f)) = dim(Im(f))$, *or* $dim(E/Ker(f)) = dim(E) - dim(Ker(f))$, *d'où* $dim(E) - dim(Ker(f)) = dim(Im(f))$, *or* $rang(f) = dim(Im(f))$, *donc* $rang(f) = dim(E) - dim(Ker(f))$. *Ainsi si* $dim(E)$ *est finie, le rang de* f *est fini et on a :* $rang(f) = dim(E) - dim(Ker(f))$. *Ce qui achève la démonstration.*

Problème 1.8.2 ***Partie A :***

1. ***1.5 pt***

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=0 \quad (L_1) \\ y+z+t=0 \quad (L_2) \\ 2y+3z+4t=0 \quad (L_3) \\ 4y+9z+16t=0 \quad (L_4) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=0 \quad \left(L_1^{'}\right)=(L_1) \\ y+z+t=0 \quad \left(L_2^{'}\right)=(L_2) \\ z+2t=0 \quad \left(L_3^{'}\right)=(L_3)-2\,(L_2) \\ 5z+12t=0 \quad \left(L_4^{'}\right)=(L_4)-4\,(L_2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=0 \quad \left(L_1^{''}\right)=\left(L_1^{'}\right) \\ y+z+t=0 \quad \left(L_2^{''}\right)=\left(L_2^{'}\right) \\ z+2t=0 \quad \left(L_3^{''}\right)=\left(L_3^{'}\right) \\ 2t=0 \quad \left(L_4^{''}\right)=\left(L_4^{'}\right)-5\left(L_3^{'}\right) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble de solution, dans $\mathbb{R}^4$, *du système :*

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \\ 2y+3z+4t=0 \\ 4y+9z+16t=0 \end{array}\right.$$

est $S=\{(0,0,0,0)\}$.

Partie B :

1. ***1.75 pts*** *Comme* $E=vect\,(g_1,g_2,g_3,g_4)$, *alors* $\mathcal{B}_1=(g_1,g_2,g_3,g_4)$ *est un système générateur de* E, *il reste, donc, à montrer que que* $\mathcal{B}_1$ *est une famille libre.*
Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ *tel que :* $\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3+\delta g_4=0_E=\theta$, *où* θ *est l'application nulle sur* $\mathbb{R}$ *et alors, en dérivant deux fois cette égalité, on obtient pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}+\delta e^{4x}=0 \\ 2\beta e^{2x}+3\gamma e^{3x}+4\delta e^{4x}=0 \\ 4\beta e^{2x}+9\gamma e^{3x}+16\delta e^{4x}=0 \end{array}\right.$$

Or, $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{3x}=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{4x}=0$, *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \alpha+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}+\delta e^{4x}=\alpha$, *d'où* $\alpha=0$, *et on a : pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}+\delta e^{4x}=0 \\ \beta e^{2x}+\gamma e^{3x}+\delta e^{4x}=0 \\ 2\beta e^{2x}+3\gamma e^{3x}+4\delta e^{4x}=0 \\ 4\beta e^{2x}+9\gamma e^{3x}+16\delta e^{4x}=0 \end{array}\right. ,$$

en donnant à x *la valeur zéro, on obtient :*

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \beta+\gamma+\delta=0 \\ 2\beta+3\gamma+4\delta=0 \\ 4\beta+9\gamma+16\delta=0 \end{array}\right.$$

Et alors, d'après la partie ***A****,* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$*, et par suite* $\mathcal{B}_1$ *est une famille libre, donc c'est une base de* E*.*
$dim\,(E) = card\,(\mathcal{B}_1) = 4.$

2. a. ***0.5 pt*** *Soient* $(f, g) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors :*

$$\begin{aligned} \varphi\,(f + \lambda g) &= (f + \lambda g)^{'} \\ &= f^{'} + \lambda g^{'} \\ &= \varphi\,(f) + \lambda \varphi\,(g)\,. \end{aligned}$$

D'où φ *est une application linéaire de* E *dans* E *, c'est donc un endomorphisme de* E*.*
b. ***1 pt*** *On a : pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi\,(g_1)\,(x) = g_1^{'}\,(x) = 0 \\ \varphi\,(g_2)\,(x) = g_2^{'}\,(x) = 2e^{2x} = 2g_2\,(x) \\ \varphi\,(g_3)\,(x) = g_3^{'}\,(x) = 3e^{3x} = 3g_3\,(x) \\ \varphi\,(g_4)\,(x) = g_4^{'}\,(x) = 4e^{4x} = 4g_4\,(x) \end{array} \right.$$

Et alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\,(g_1) = 0.g_1 + 0.g_2 + 0.g_3 + 0.g_4 \\ \varphi\,(g_2) = 0.g_1 + 2.g_2 + 0.g_3 + 0.g_4 \\ \varphi\,(g_3) = 0.g_1 + 0.g_2 + 3.g_3 + 0.g_4 \\ \varphi\,(g_4) = 0.g_1 + 0.g_2 + 0.g_3 + 4.g_4 \end{array} \right.$$

Donc la matrice de φ *dans la base* $\mathcal{B}_1$ *est donnée par :* $M = [\varphi]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$
c. ***1.5 pts*** *Pour tout* $f = \alpha.g_1 + \beta.g_2 + \gamma.g_3 + \delta.g_4,\ \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$*, élément*

de E on a :

$$\begin{aligned}
f \in F &\Longleftrightarrow \varphi(f) = \theta \\
&\Longleftrightarrow M.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta \\ 3\gamma \\ 4\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 3\gamma = 0 \\ 4\delta = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow f = \alpha g_1 \\
&\Longleftrightarrow f \in vec(g_1).
\end{aligned}$$

Donc $F = vect(g_1)$.
Comme $F = Ker(\varphi) = vect(g_1)$ *et* $g_1 \neq \theta$ *c'est-à-dire que* g_1 *est différent du vecteur nul de* E*, alors* $Ker(\varphi) \neq \{0_E\}$, *d'où* φ *n'est pas injective, par suite elle n'est pas bijective, donc* $\varphi \notin \mathcal{GL}(E)$.

3. *a.* ***1 pt*** ***Linéarité :*** *Soient* $(f,g) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors :*

$$\begin{aligned}
p(f+\lambda g) &= (f+\lambda g) + F \\
&= (f+\lambda g) + F + F \quad (F + F = F,\ car\ F\ est\ un\ sous-espace\ de\ E) \\
&= (f+F) + (\lambda g + F) \\
&= p(f) + (\lambda g + \lambda.F)\ \ si\ \lambda \neq 0\ \ (\lambda.F = \{\lambda.x : x \in F\} = F,\ car\ F\ est\ un\ sous- \\
&= p(f) + \lambda.(g+F) \\
&= p(f) + \lambda p(g).
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, $p(f+\lambda.g) = p(f) = p(f) + 0.p(g) = p(f) + \lambda.p(g)$.
D'où p *est une application linéaire de* E *dans* E/F.
Surjection : 0.5 pt *Soit* $y = f + F$ *un élément de* E/F*, alors* $f \in E$ *et on a bien* $p(f) = f + F$ *(par définition de* p*, ou encore* $p(f) = y$*. Et donc* p *est surjective.*
En définitive, p *est une application linéaire surjective de* E *sur* E/F.

b. ***1.75 pts*** *D'après le théorème du rang,* $dim(Im(\varphi)) = dim(E) - dim(Ker(\varphi))$, *et comme* $Ker(\varphi) = vect(g_1)$ *et* $g_1 \neq 0_E$*, d'après la question 2.c, alors* $dim(Ker(\varphi)) = 1$*, et par suite* $dim(Im(\varphi)) = 4 - 1 = 3$.

Et comme $\varphi(g_2) = 2.g_2$, $\varphi(g_3) = 3.g_3$ *et*$\varphi(g_4) = 4.g_4$, *ce qui est équivaut à* $\varphi\left(\frac{1}{2}g_2\right) = g_2$, $\varphi\left(\frac{1}{3}g_3\right) = g_3$ *et*$\varphi\left(\frac{1}{4}g_4\right) = g_4$, *d'où* $(g_2, g_3, g_4) \in (Im(\varphi))^3$, *et comme* (g_2, g_3, g_4) *est une famille libre (sous famille de la famille libre* (g_1, g_2, g_3, g_4)*), alors* (g_2, g_3, g_4) *est une base de* $Im(\varphi)$. *Or* $p_{|Im(\varphi)}$ *est un isomorphisme de* $Im(\varphi)$ *vers* $E/Ker(\varphi) = E/F$, *d'où* $(p(g_2), p(g_3), p(g_4))$ *est une base de* E/F, *c'est-à-dire que*
$(g_2 + Ker(\varphi), g_3 + Ker(\varphi), g_4 + Ker(\varphi))$ *est une base de* E/F *et* $dim(E/F) = 3$.
c. ***0.5 pt*** p *ne peut être un isomorphisme, car* $dim(E) \neq dim(E/F)$ $(dim(E) = 4$ *et* $dim(E/F) = 3)$.

Partie C : (5.5 pts)

1. ***0.5 pt*** P *étant la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}_1$ *à la base* $\mathcal{B}_2$, *elle est donc inversible.*

2. ***0.5 pt*** $\begin{cases} h_1 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ h_2 = g_2 + g_3 + g_4 \\ h_3 = 2g_2 + 3g_3 + 4g_4 \\ h_4 = 4g_2 + 9g_3 + 16g_4 \end{cases}$

3. ***2 pt***

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = h_1 & (L_1) \\ g_2 + g_3 + g_4 = h_2 & (L_2) \\ 2g_2 + 3g_3 + 4g_4 = h_3 & (L_3) \\ 4g_2 + 9g_3 + 16g_4 = h_4 & (L_4) \end{cases} \iff \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = h_1 & \left(L_1'\right) = (L_1) \\ g_2 + g_3 + g_4 = h_2 & \left(L_2'\right) = (L_2) \\ g_3 + 2g_4 = h_3 - 2h_2 & \left(L_3'\right) = (L_3) - 2(L_2) \\ 5g_3 + 12g_4 = h_4 - 4h_2 & \left(L_4'\right) = (L_4) - 4(L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = h_1 & \left(L_1''\right) = \left(L_1'\right) \\ g_2 + g_3 + g_4 = h_2 & \left(L_2''\right) = \left(L_2'\right) \\ g_3 + 2g_4 = h_3 - 2h_2 & \left(L_3''\right) = \left(L_3'\right) \\ 2g_4 = h_4 - 4h_2 - 5h_3 + 10h_2 & \left(L_4''\right) = \left(L_4'\right) - 5\,(\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g_1 = h_1 - (g_2 + g_3 + g_4) = h_1 - h_2 \\ g_2 = h_2 - g_3 - g_4 \\ g_3 = h_3 - 2h_2 - h_4 + 5h_3 - 6h_2 \\ g_4 = \frac{1}{2}(h_4 + 6h_2 - 5h_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g_1 = h_1 - h_2 \\ g_2 = h_2 + 8h_2 - 6h_3 + h_4 - \frac{1}{2}(h_4 - 5h_3 + 6h_2) \\ g_3 = -8h_2 + 6h_3 - h_4 \\ g_4 = \frac{1}{2}(h_4 - 5h_3 + 6h_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g_1 = h_1 - h_2 \\ g_2 = \frac{1}{2}(12h_2 - 7h_3 + h_4) \\ g_3 = -8h_2 + 6h_3 - h_4 \\ g_4 = \frac{1}{2}(6h_2 - 5h_3 + h_4) \end{cases}$$

1.5 pt *On sait que* $P^{-1} = P_{B_2B_1}$, *d'où*

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & -16 & 6 \\ 0 & -7 & 12 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M' = P^{-1}MP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & -16 & 6 \\ 0 & -7 & 12 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ 4 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 1 & 1 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. ***1 pt*** *La matrice* M' *étant la matrice de l'application linéaire* φ, *qui est non bijective, elle est donc non inversible.*
$rang\left(M'\right) = rang\left(\varphi\right) = dim\left(Im\left(\varphi\right)\right) = 3.$

1.9 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2016-2017

$SMA - SMI$

$Epreuve\ d'algèbre3 - Juin\ 2017\ (S.N., S_2)$

$(Durée : 1H30min)$

$N.B :$ *Aucun document n'est autorisé.*

Traiter au choix : soit l'exercice 4, **soit la question** 3 **de l'exercice** 1 **.**

1.9.1 Énoncé

Exercice 1.9.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\boldsymbol{S}$ un système générateur fini de E.*

1. *Soit $\boldsymbol{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, un sous-système de $\boldsymbol{S}$ comportant le plus grand nombre de vecteurs linéairements indépendants. Montrer que $\boldsymbol{B}$ est une base de E et donner $dim\,(E)$.*
2. *Soit $F = vect\left(\boldsymbol{B}'\right)$ où $\boldsymbol{B}'$ est une famille libre de E.*
   a. *Montrer que l'application $p : E \longrightarrow E/F,\ x \longmapsto p\,(x) = x + F$ est linéaire et déterminer son noyau $Ker\,(p)$.*
   b. *En utilisant le théorème du rang, montrer que $dim\,(E/F) = dim\,(E) - dim\,(F)$.*
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n\,(\mathbb{K})$.*
   a. *Écrire sous forme de système d'inconnues dans $\mathbb{K}^n$, l'équation $AX = 0$ et montrer que $\boldsymbol{S}$, l'ensemble de solutions de ce système, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*
   b. *Montrer que **i.** , **ii.** et **iii.** sont équivalentes, où : **i. A est inversible**, **ii.** $\mathbf{det\,(A) \neq 0}$ et **iii.** $\mathbf{rang\,(A) = n}$ et donner, dans ce cas, $det\,(A^{-1})$ en fonction de $det\,(A)$ et écrire en extension l'ensemble $\boldsymbol{S}$.*

Exercice 1.9.2 *Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'application linéaire : $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\quad (x, y, z, t) \longmapsto f\,((x, y, z, t)) = (x + y + t, x - z + 2t, y + z - t, y + z - t)$*

1. *Écrire la Matrice A de l'endomorphisme f dans à la base $\mathcal{B}$.*
2. *Calculer $det\,(A)$ et déduire que f n'est pas un automorphisme de E.*
3. *Déterminer une base $\mathcal{B}_0 = (u_1, u_2)$ de $Ker(f)$ et en déduire le rang de f.*
4. *Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^4$ tels que $f\,(u_3) = -u_3$ et $f\,(u_4) = 2u_4$ et dire pourquoi $(u_3, u_4) \in (Im\,(f))^2$?*
5. *Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

6. *Déterminer les matrices de* f, f^2 *et* f^3 *dans la base* $\mathcal{B}_1$, *où* $f^2 = f \circ f$ *et* $f^3 = f^2 \circ f$.
7. *En déduire que :* $f^3 = f^2 + 2f$.

Exercice 1.9.3 *Soient* E *un espace vectoriel sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$ *et* $p \in \mathcal{L}(E)$ *vérifiant* $p \circ p = p$.

1. *Soient* f *et* g *deux endomorphismes de* E.
   a. *Montrer que si* $g \circ f = \theta$, *alors* $Im\,(f) \subset Ker\,(g)$, *où* θ *est l'endomorphisme nul de* E.
   b. *Montrer que* $f \circ f = f \Longleftrightarrow (id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E - f$.
2. a. *Montrer que* $Im\,(id_E - p) = Ker\,(p)$ *et en déduire que* $Ker\,(id_E - p) = Im\,(p)$ *et que*
   $\forall x \in Im\,(p)\;\; p\,(x) = x$.
   b. *Montrer que* $Ker\,(p)$ *et* $Im\,(p)$ *sont supplémentaires.*
3. *On suppose désormais que* E *est de dimension finie* n. *Montrer qu'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *dans laquelle* p *a pour matrice* $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \theta_{n-r} \end{pmatrix}$, *où* r *est le rang de* p, I_r *est la matrice identité d'ordre* r *et* θ_{n-r} *est la matrice nulle d'ordre* $n - r$.

Exercice 1.9.4 *Soit* $F = \frac{3X-5}{(X-3)^5(X^2-7X+13)}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 7X + 13$ *est irréductible dans* $\mathbb{R}\,[X]$.
2. *Décomposer la fraction rationnelle* F *en éléments simples dans* $\mathbb{R}\,(X)$.

Bon courage

1.9.2 Corrigé

Exercice 1.9.5 1. *Comme* $\mathbf{S}$ *est un système générateur de* E *et* $\mathbf{B}$ *est un sous-système de* $\mathbf{S}$ *qui est libre dans* E, *il suffit de montrer que* $\forall x \in \mathbf{S}$ $\exists\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Si $\mathbf{B} = \mathbf{S}$, *on a le résultat.*
Si $\mathbf{B} \neq \mathbf{S}$, *alors : pour tout* $x \in \mathbf{S}\ \mathbf{B}$, *la famille* $\mathbf{S}' = \mathbf{B} \cup \{x\}$ *est une sous-famille de* $\mathbf{S}$ *et* $card\,(\mathbf{S}') > card\,(\mathbf{B})$, *donc, d'après la définition de* $\mathbf{B}$, *la famille* $\mathbf{S}'$ *est liée ; d'où* $\exists\,(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *non tous nuls tels que* $\alpha.x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. *On a nécessairement* $\alpha \neq 0$, *car si non les éléments de* $\mathbf{B}$ *vérifieraient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls et* $\mathbf{B}$ *ne serait pas libre. On en déduit*

$$x = \left(-\alpha^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-\alpha^{-1}\alpha_i\right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \left(\lambda_i = -\alpha^{-1}\alpha_i\right).$$

2. a. *Soit* $(\alpha, x, y) \in \mathbb{K}^* \times E^2$, *alors*

$$\begin{aligned} p(x+\alpha.y) &= (x+\alpha.y)+F \\ &= (x+F)+(\alpha.y+F) \quad (F\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E \implies F+F=F) \\ &= (x+F)+(\alpha.y+\alpha.F) \quad (F\ sous-espace\ vectoriel\ de\ E \implies \alpha.F=F\ car\ \alpha\neq 0) \\ &= (x+F)+\alpha.(y+F) \\ &= p(x)+\alpha.p(y). \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$, *on a bien* $p(x+0.y) = p(x)+0.p(y)$.
Donc p *est une application linéaire.*

$$\begin{aligned} Ker(p) &= \{x\in E : p(x)=F\} \ \left(0_{E/F}=F\right) \\ &= \{x\in E : x+F=F\} \\ &= \{x\in E : x\in F\} \ (\forall x\in E\ x+F=F \iff x\in F) \\ &= F. \end{aligned}$$

b. *D'après le théorème du rang on a :* $dim(Imp) = dimE - dim(Kerp)$, *mais* p *est surjective (par construction), d'où* $Imp = E/F$ *et alors* $dim(E/F) = dimE - dim(F)$.

3. a. *Posons* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,
alors l'équation $A.X = 0$ *est équivalente au système*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

dont les inconnues sont $x_1, x_2, \dots$ *et* x_n *dans* $\mathbb{K}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ *l'application linéaire dont* A *est sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$, *alors le système* (S) *est équivalent à* $f(X) = \theta$, *où* θ *est le zéro de* $\mathbb{K}^n$; *son ensemble de solution est donc* $S = Ker(f)$ *qui est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$.

b. *i.* $\implies$ *ii. Supposons que* A *est inversible, alors* $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(B = A^{-1})$ *telle que* $A.B = I$, *où* I *est la matrice identité d'ordre* n, *et* $det(A.B) = det(I)$ *ou encore* $det(A).det(B) = 1$, *ce qui entraine que* $det(A) \neq 0$ *et* $det(B) = det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.
ii. $\implies$ *iii. Supposons que* $det(A) \neq 0$, *alors si* f *est l'endomorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *dont la matrice dans une base de* $\mathbb{K}^n$ *est* A, *alors :* $det(f) = det(A)$, *d'où* $det(f) \neq 0$ *et alors* f *est un automorphisme de* $\mathbb{K}^n$ *donc* $rang(f) = n$ *et alors* $rang(A) = n$.

iii. $\Longrightarrow$ *i. Supposons que* $rang\,(A) = n$, *alors* $rang\,(f) = n$, *d'où* f *est un automorphisme et alors* A *est inversible.*
A *étant inversible, d'où* $A.X = 0 \Longleftrightarrow X = A^{-1}.0 = 0$, *donc l'ensemble de solution, dans* $\mathbb{K}^n$, *du système est* $\mathbf{S} = \{(0, ..., 0)\}$.

Exercice 1.9.6 1. *La matrice* A *de* f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} det\,(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \;\; (\textit{les deux dernières lignes sont égales }). \end{aligned}$$

Comme $det\,(A) = 0$, *alors* $det\,(f) = 0$ *et alors* f *n'est pas bijective, c'est à dire qu'elle n'est pas un automorphisme de* E.

3. *Pour tout* $u = (x, y, z, t)$ *de* $\mathbb{R}^4$, *on a :*

$$\begin{aligned} u \in Ker\,(f) &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + t = 0 \\ x - z + 2t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + t = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} z = -x - 2y \\ t = -x - y \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Ker\,(f) &= \{(x, y, -x-2y, -x-y) : x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \\ & \{x.\,(1,0,-1,-1) + y.\,(0,1,-2,-1) : x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \\ &= vect\,(u_1, u_2) \quad \text{où } u_1 = (1,0,-1,-1) \text{ et } u_2 = (0,1,-2,-1). \end{aligned}$$

Et comme : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned} x.\,(1,0,-1,-1) + y.\,(0,1,-2,-1) = (0,0,0,0) &\Longleftrightarrow (x, y, -x-2y, -x-y) = (0,0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{B}_0 = (u_1, u_2)$ *est libre, c'est donc une base de* $Ker\,(f)$. *Et d'après le théorème du rang,* $ran\,(f) = dim\,(\mathbb{R}^4) - dim\,(Ker\,(f)) = 4 - 2 = 2$.

4. *Pour tout* $u = (x, y, z, t)$ *de* $\mathbb{R}^4$, *on a :*

$$f(u) = -u \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + t = -x \\ x - z + 2t = -y \\ y + z - t = -z \\ y + z - t = -t \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z = -y \\ z = t \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = -y \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow u = y.(0, 1, -1, -1)$$

Et

$$f(u) = 2u \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + t = 2x \\ x - z + 2t = 2y \\ y + z - t = 2z \\ y + z - t = 2t \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ 2z = y \\ z = t \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow u = z.(3, 2, 1, 1)$$

Donc $u_3 = (0, 1, -1, -1)$ *et* $u_4 = (3, 2, 1, 1)$ *conviennent . Par ailleurs* $f(u_3) = -u_3$ *et* $f(u_4) = 2u_4$ *entrainent que* $f(-u_3) = u_3$ *et* $f\left(\frac{1}{2}u_4\right) = u_4$ *d'où* $\exists (u, v) \in (\mathbb{R}^4)^2 : f(u) = u_3$ *et* $f(v) = u_4$, *donc* $(u_3, u_4) \in (Im(f))^2$ $\left(u = -u_3 \text{ et } v = \frac{1}{2}u_4\right)$.

5. *Comme*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 6$$

D'où $det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq 0$ *et alors* $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.

6. *Comme* $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = 0$, $f(u_3) = -u_3$ *et* $f(u_4) = 2u_4$, *alors la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}_1$ *est* $B = [f]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *les matrices respectives de* f^2 *et* f^3 *sont :* $[f^2]_{\mathcal{B}_1} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $[f^3]_{\mathcal{B}_1} = B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

7. *Comme* $B^2 + 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = B^3$, *alors* $[f^2 + 2f]_{\mathcal{B}_1} = [f^3]_{\mathcal{B}_1}$ *et par suite* $f^3 = f^2 + 2f$.

Exercice 1.9.7 1. a. *Soit* $y \in Im(f)$, *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$, *d'où* $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = \theta(x) = 0$, *et alors* $y \in Ker(g)$. *Donc* $Im(f) \subset Ker(g)$.

b. *Comme* $(id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E - f - f + f \circ f$, *alors :*

$$\begin{aligned} f \circ f = f &\iff -f + f \circ f = \theta \\ &\iff (id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E - f. \end{aligned}$$

2. a. *Comme* $p \circ p = p$, *alors* $p - p \circ p = \theta$, *ou encore* $p \circ (id_E - p) = \theta \ (**)$, *et alors, d'après* 1.a., $Im(id_E - p) \subset Ker(p)$.
Par ailleurs, pour tout $x \in E$, *si* $x \in Ker(p)$, *alors* $p(x) = 0$, *et par suite* $(id_E - p)(x) = id_E(x) - p(x) = x$, *d'où* $x \in Im(id_E - p)$. *Donc* $Ker(p) \subset Im(id_E - p)$.
Donc $Im(id_E - p) = Ker(p)$.
D'après 1.b., $(id_E - f) \circ (id_E - f) = id_E - f$, *d'où* $Im(id_E - (id_E - p)) = Ker(id_E - p)$, *ou encore* $Im(p) = Ker(id_E - p)$.
Pour tout $x \in E$, *si* $x \in Im(p)$, *alors* $x \in Ker(id_E - p)$, *d'où* $(id_E - p)(x) = 0$, *et alors* $x - p(x) = 0$, *donc* $p(x) = x$.

b. *On a :* $Ker(p) + Im(p)$ *est un sous-espace vectoriel de* E. *Par ailleurs, pour tout* $x \in E$, $x = (x - p(x)) + p(x)$, *avec* $p(x - p(x)) = p \circ (id_E - p)(x) = \theta(x) = 0$, *d'après a.* $(**)$, *c'est-à dire que* $x - p(x) \in Ker(p)$; *et* $p(p(x)) = p \circ p(x) = p(x)$, *c'est-à dire que* $p(x) \in Im(p)$; *d'où* $x \in Ker(p) + Im(p)$, *et alors* $E \subset Ker(p) + Im(p)$. *Donc* $E = Ker(p) + Im(p)$.
Par ailleurs, pour tout $x \in E$, *si* $x \in Ker(p) \cap Im(p)$, *alors* $x \in Ker(p) \cap Ker(id_E - p)$, *d'où* $(id_E - p)(x) = 0$ *et* $p(x) = 0$, *ou encore* $x - p(x) = 0$ *et* $p(x) = 0$, *alors* $x = 0$; *d'où* $Ker(p) \cap Im(p) = \{0\}$.
Finalement $Ker(p)$ *et* $Im(p)$ *sont supplémentaires.*

3. • ***Si*** $p = \theta$, *le résultat demandé est vérifié.*
   • ***Si*** $p \neq \theta$, *Soit* $r = rang\,(p)$, *alors* $r = dim\,(Im\,(p))$ *et d'après le théorème du rang* $dim\,(Ker\,(p)) = n - r$; *soient alors* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_r)$ *une base de* $Im\,(p)$ *et* $\mathcal{B}_1 = (e_{r+1}, e_{r+2}, ..., e_n)$ *une base de* $Ker\,(p)$, *alors, et puisque* $Ker\,(p) \oplus Im\,(p) = E$, *on a :* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, ..., e_n)$ *est une base de* E, *et comme* $(\forall i \in \{1, 2, ..., r\})\ p\,(e_i) = e_i$, *d'après 2.a., et pour tout* $i \in \{r+1, r+2, ..., n\}\ \ p\,(e_i) = 0$, *alors la matrice de* p *dans la base* $\mathcal{B}$ *a la forme demandée.*

Exercice 1.9.8 *1. Le discriminant du trinôme* $x^2 - 7x + 13$ *est* $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 13 = -3$, *d'où* $\Delta < 0$, *et alors, le polynôme* $X^2 - 7X + 13$ *est irréductible dans* $\mathbb{R}\,[X]$.

2. *On pose* $Y = X - 3$, *alors :* $X = Y + 3$, $3X - 5 = 3Y + 4$ *et* $X^2 - 7X + 13 = Y^2 - Y + 1$. *Et alors :*

$$F = \frac{3Y + 4}{Y^5\,(Y^2 - Y + 1)}$$

En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $3Y + 4$ *par* $Y^2 - Y + 1$ *à l'ordre* 4, *on obtient :*

$$3Y + 4 = \left(-7Y^4 - 4Y^3 + 3Y^2 + 7Y + 4\right)\left(Y^2 - Y + 1\right) + Y^5\,(7Y - 3)$$

Et alors :

$$\begin{aligned} F &= \frac{(-7Y^4 - 4Y^3 + 3Y^2 + 7Y + 4)\,(Y^2 - Y + 1) + Y^5\,(7Y - 3)}{Y^5\,(Y^2 - Y + 1)} \\ &= \frac{-7Y^4 - 4Y^3 + 3Y^2 + 7Y + 4}{Y^5} + \frac{7Y - 3}{Y^2 - Y + 1} \\ &= -\frac{7}{Y} - \frac{4}{Y^2} + \frac{3}{Y^3} + \frac{7}{Y^4} + \frac{4}{Y^5} + \frac{7Y - 3}{Y^2 - Y + 1} \\ &= -\frac{7}{X - 3} - \frac{4}{(X - 3)^2} + \frac{3}{(X - 3)^3} + \frac{7}{(X - 3)^4} + \frac{4}{(X - 3)^5} + \frac{7X - 24}{X^2 - 7X + 13}\,. \end{aligned}$$

□

1.10 Université Sidi Mohammed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès Département de mathématiques 2016-2017

$$SMA - SMI$$

$$Epreuve\ d'alg\grave{e}bre3 - Juillet\ 2017\,(S.R., S_2)$$

$$(Dur\acute{e}e : 1H30min)$$

$$N.B: \ Aucun\ document\ n'est\ autoris\acute{e}.$$

1.10.1 Énoncé

N.B. : Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.10.1 *Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application linéaire : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto f((x, y, z)) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$*

1. *Donner la Matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.*
2. *Calculer $\det(A)$ et déduire que f n'est pas un automorphisme de E.*
3. *Déterminer le rang de f et la dimension du $Ker(f)$.*
4. *Montrer que $Ker(f) = vect(u_1)$ où $u_1 = (2, 2, 1)$.*
5. *Soit $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$.*
   (a) *Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_2 et u_3.*
   (b) *En déduire que $u_2 \in Im(f)$, $u_3 \in Im(f)$ et que (u_2, u_3) est une base de $Im(f)$.*
6. *Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
7. *Donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$ (sans utiliser les matrices de passages).*
8. *Déterminer une matrice carrée inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.*
9. *Soit n un entier naturel non nul; déterminer la matrice A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n.*
10. *Calculer l'inverse P^{-1} de P.*
11. *En utilisant les deux questions précédentes 9 et 10 , calculer A^n, pour tout entier naturel non nul n.*

Exercice 1.10.2 *Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on considère la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on note

$$\mathcal{C}\left(T\right)=\left\{M\in E:MT=TM\right\} \text{ et } F=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}:x\in\mathbb{K},y\in\mathbb{K},z\in\mathbb{K} \text{ et } t\in\mathbb{K}\right\},$$

c'est-à-dire que $F=\mathcal{M}_{4\ 1}\left(\mathbb{K}\right)$. *On rappelle que* F *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* 4.

1. *Montrer que* $\mathcal{C}\left(T\right)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Montrer qu'il existe* $u\in F$ *tel que* $T^3u\neq\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$ *et montrer que la famille* (u,Tu,T^2u,T^3u) *constitue une base de* F *(on pourra montrer que la matrice* T *est nilpotente d'indice de nilpotence* 4*).*
3. *Soit* $\varphi_u:\mathcal{C}(T)\to F$ *l'application définie par* $\varphi_u(M)=Mu$. *Montrer que* φ_u *est un isomorphisme.*
4. *En déduire que* $\mathcal{C}(T)=\mathrm{Vect}(\mathrm{I},T,T^2,T^3)$, *où* I *est la matrice identité d'odre* 4 *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Bon courage